Управління освіти і науки Чернігівської облдержадміністрації
Чернігівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
імені К. Д. Ушинського

Завдання другого етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2017-2018 н. р.

6 клас

1. Знайдіть найменше семицифрове число, яке ділиться націло на 9 та має усі різні цифри.
2. Підручники становлять $\frac{1}{3}$ всіх книжок шкільної бібліотеки, а підручники з математики – $\frac{6}{25}$ усіх підручників. Яку частину всіх книжок, що є в бібліотеці, становлять підручники з математики?
3. На столі лежать в ряд чотири фігури: трикутник, круг, прямокутник і ромб. Вони пофарбовані в різні кольори: червоний, синій, жовтий, зелений. Відомо, що червона фігура лежить між синьою і зеленою; справа від жовтої фігури лежить ромб; круг лежить правіше і трикутника і ромба; трикутник лежить не з краю; синя і жовта фігури лежать не рядом. Визначте, в якому порядку лежать фігури і якого вони кольору.
4. Запишіть 7 послідовних натуральних чисел, щоб серед цифр в їх запису було рівно 19 трійок.
5. Яку найбільшу кількість прямокутників розміром 1×5 можна вирізати з квадрату 13×13?

На виконання роботи відводиться 3 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів заборонено.

Управління освіти і науки Чернігівської облдержадміністрації
Чернігівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
імені К. Д. Ушинського

Завдання другого етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2017-2018 н. р.

7 клас

1. Знайдіть найменше семицифрове число, яке ділиться націло на 9 та має усі різні цифри.
2. Магазин придбав олівці в коробках у виробника за певну ціну. Тепер він їх продає або по 10 гривень за одну коробку, або по 20 гривень за 3 коробки. Виявилось, що прибуток при продажі однієї коробки олівців та при продажі трьох коробок олівців – однаковий. За якою ціною магазин придбав олівці у виробника?
3. На першому курсі університету навчаються 40 % дівчат та 60 % юнаків. Відомо, що 20 % юнаків не люблять математичний аналіз, а дівчата усі його люблять. Яке відношення кількості дівчат до юнаків, хто любить математичний аналіз?
4. Два автомобілі знаходяться на одній дорозі на відстані 200 км, один рухається зі швидкістю 60 км/год, а інший – 40 км/год. Через який час відстань між ними може знову стати 200 км? Вкажіть усі можливі відповіді.
5. Яку найбільшу кількість прямокутників розміром 1×5 можна вирізати з квадрату 13×13?

На виконання роботи відводиться 3 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів заборонено.

Управління освіти і науки Чернігівської облдержадміністрації
Чернігівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
імені К. Д. Ушинського

Завдання другого етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2017-2018 н. р.

8 клас

1. Магазин придбав олівці в коробках у виробника за певну ціну. Тепер він їх продає або по 10 гривень за одну коробку, або по 20 гривень за 3 коробки. Виявилось, що прибуток при продажі однієї коробки олівців та при продажі трьох коробок олівців – однаковий. За якою ціною магазин придбав олівці у виробника?
2. Яку найбільшу кількість прямокутників розміром 1×5 можна вирізати з квадрату 13×13?
3. Чи існують натуральні числа m, n, які задовольняють рівність: $m^2+n^2-mn=2018$?
4. На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $AB+MC=AM+BC$. Доведіть, що кола, вписані в трикутники ABM і MBC дотикаються.
5. Є 9 гирь вагою 1 г, 2 г, ..., 9 г. Андрій та Олеся по черзі беруть гирі і кладуть їх на ваги зі стрілкою, не знімаючи попередні. Якщо після чергової гирі стрілка покаже вагу більше 25 г, то той, хто поклав цю гирю, програв. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний намагається перемогти та перший хід робить Андрій?

На виконання роботи відводиться 3 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів заборонено.

Управління освіти і науки Чернігівської облдержадміністрації
Чернігівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені К. Д. Ушинського

Завдання другого етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2017-2018 н. р.

9 клас

1. Яку найбільшу кількість прямокутників розміром 1×5 можна вирізати з квадрату 13×13?
2. Чи існують натуральні числа $m,n,$ для яких виконується рівність $m^2-n^2=2018$?
3. Ненульові числа a,b задовольняють умови: $6a+6b=\frac{25}{a}+\frac{25}{b}=25.$ Чому може дорівнювати значення виразу $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$?
4. Задано ромб, у якого усі сторони та одна із діагоналей рівні 6 см. Всередині або на сторонах цього ромба вибирають довільним чином 9 точок. Доведіть, що принаймні дві з них знаходяться на відстані не більшій від 3 см.
5. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BE і DF на сторони AD і BC відповідно, які ділять цей паралелограм на три частини рівної площі. На промені BD за вершину D відкладається відрізок $DG=BD$. Пряма BE перетинає відрізок AG у точці H. Знайдіть відношення $AH:HG$.

На виконання роботи відводиться 4 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів заборонено.

Управління освіти і науки Чернігівської облдержадміністрації
Чернігівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
імені К. Д. Ушинського
Завдання другого етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2017-2018 н. р.
10 клас

1. Порівняйте числа $a=(-3)^{3^3}$, $b=3^{(-3)^3}$ та $c=3^{3^{(\ 3)}}$ між собою.
2. Є таблиця, що має два рядки та 1007 стовпчиків. У перший ряд розставлені зліва направо у порядку зростання натуральні числа від 1 до 1007, а у другий ряд так само у порядку зростання натуральні числа від 1008 до 2014. Для якої кількості стовпчиків має місце властивість – число у другому рядку ділиться на число у першому рядку?
3. На нараду в міністерство для обговорення питань олімпіад запросили 30 заслужених вчителів України з математики, фізики, хімії та біології. Серед запрошених фізиків та біологів разом виявилось удвічі менше ніж математиків, а фізиків та хіміків разом удвічі більше ніж біологів. Скільки на зустріч запросили математиків, якщо вчителів з кожного предмету була різна кількість?
4. Знайдіть усі такі функції $f(x)$, що визначені на множині дійсних чисел, які для довільних дійсних x, y задовольняють рівність: $f(xy)=xf(y)+3f(x)+3$.
5. AB – найбільша сторона у трикутнику ABC. На цій стороні відмітили точки M, N таким чином, що $AM=AC$ та $BN=BC$. Позначимо через P та R середини відрізків MC та NC відповідно. Вписане коло ΔABC дотикається його сторін BC та AC у точках D та E відповідно. Доведіть, що точки P, R, D, E лежать на одному колі.

На виконання роботи відводиться 4 години.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Використання калькуляторів та інших електронних засобів заборонено.

Управління освіти і науки Чернігівської облдержадміністрації

Чернігівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені К. Д. Ушинського

Завдання другого етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2017-2018 н. р.

11 клас

1. Розв'язати рівняння: $sinx = cosx$.
2. Доведіть, що ні при яких натуральних m, n значення виразу $3^m + 3^n + 1$ не є точним квадратом натурального числа.
3. Знайдіть усі такі функції $f(x)$, що визначені на множині дійсних чисел, які для довільних дійсних x, y задовольняють рівність: $f(xy) = xf(y) + 3f(x) + 3$.
4. AB – найбільша сторона у трикутнику ABC. На цій стороні відмітили точки M, N таким чином, що $AM = AC$ та $BN = BC$. Позначимо через P та R середини відрізків MC та NC відповідно. Вписане коло ΔABC дотикається його сторін BC та AC у точках D та E відповідно. Доведіть, що точки P, R, D, E лежать на одному колі.
5. Є три купки камінців, у першій з них a, у другій – b і у третій – c камінців, при цьому $a \geq b \geq c > 0$. Андрій та Олеся грають у таку гру. Той, чий хід, вибирає дві довільні купки і перекладає принаймні 1 камінець з меншої за кількістю камінців купки до більшої (якщо у купках однакова кількість камінців, то можна перекладати з будь-якої). Перемагає той, після ходу якого залишиться дві порожні купки. Першим розпочинає Андрій. При яких початкових значення a, b, c у цій грі перемагає Андрій, а при яких – Олеся, якщо кожен намагається виграти?

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів. Використання калькуляторів та інших електронних засобів заборонено.

Відповіді та вказівки ІІ етап 2017 рік.

6.1. 1023489.

6.2. $\frac{2}{25}$.

6.3. жовтий прямокутник, зелений ромб, червоний трикутник, синій круг.

6.4. Наприклад 3327, 3328, 3329, 3330, 3331, 3332, 3333.

6.5. Відповідь: 33. Оскільки площа квадрату $13\times13=169$, $169=5\cdot33+4$, тому максимум можна вирізати 33 прямокутники 1×5. Легко навести приклад такого вирізання. Відповідь без прикладу – не є розв’язанням!

7.1. Див. 6.1.

7.2. 5 гривень за коробку. Ціна за 1 коробку у виробника дорівнює x. Тому маємо рівняння: $10-x=20-3x$.

7.3. $\frac{5}{6}$. Нехай юнаків на першому курсі $6x$, тоді дівчат – $4x$. Хлопців, що не люблять математичний аналіз $\frac{1}{5}\cdot 6x=\frac{6x}{5}$, а тих, що люблять – $\frac{24x}{5}$. Таким чином шукане відношення дорівнює $\frac{4x}{\frac{24x}{5}}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$.

7.4. Через 4 години або через 20 годин.

7.5. Див. 6.5.

8.1. Див. 7.2.

8.2. Див. 6.5.

8.3. Якщо обидва або рівно одне з m, n непарне, то ліва частина рівності – непарна, а права – парна, тому рівність неможлива. Але, якщо m, n – парні, то ліва частина кратна 4, а права не кратна 4.

8.4. Задача 3.28 підручник Мерзляк та ін. (погл.) Використовуючи рівність відрізків дотичних показати, що точки дотику вписаних кіл до відрізка BM співпадають.

8.5. Перемагає Андрій. Першим ходом Андрій кладе гирю вагою 5 г. А далі якщо Олеся вибирає гирю вагою n г, то він вибирає гирю, вагою $10-n$ г. Так після його третього ходу на шальках буде рівно 25 г і Олеся програє наступним ходом.

9.1. Див. 6.5.

9.2. Не існують. Оскільки $m-n$ та $m+n$ – числа однакової парності, то їх добуток або непарний, або кратний 4. Оскільки 2018 парне, але не кратне 4, то наведена рівність неможлива.

9.3. Легко показати, що $a+b=ab$. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=(a+b)-2=\frac{25}{6}-2=\frac{13}{6}$.

9.4. Розіб’ємо цей ромб спочатку на два правильних трикутники. А тепер кожний з них розіб’ємо на 4 рівних рівносторонні трикутники зі стороною 3 см. Усього маємо 8 трикутників, а точок 9, то за принципом Діріхле принаймні дві з них попадуть у один трикутник. Але найбільша відстань між точками в цьому трикутнику не перевищує 3 см, що й треба було довести.

9.5. $AH:HG=1:1$. З формули для площі трикутника очевидно, що $AE=2DE$. Оскільки AD – медіана ΔABG, тому E – точка перетину медіан ΔABG, а тому також медіана цього трикутника, звідки $AH=HG$.

10.1. $a<b<c$.

10.2. 4. Позначимо число у першому рядку через k, тоді число під ним дорівнює $1007+k$. Питання задачі – для скількох k: $1\le k\le1007$ число $1007+k\,\vdots\,k$. Зрозуміло, що це виконується тоді і тільки тоді, коли k – дільник 1007. Число $1007 = 19 \cdot 53$ має рівно 4 дільники – $1; 19; 53; 1007$.

10.3. 18. Позначимо кількість вчителів математиків, фізиків, хіміків та біологів через m, f, h, b відповідно. Тоді маємо такі умови:

$$\begin{cases} m + f + h + b = 30, \\ f + b = \frac{1}{2} m, \\ f + h = 2b. \end{cases}$$

Звідки отримаємо : $2f + 5b = 30$. Оскільки m, f, h, b – цілі невід'ємні числа, то зрозуміло, що b повинно бути парним числом від 0 до 6. Залишилося розглянути ці варіанти.

10.4. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Якщо підставити $x = 0$, то отримаємо, що $f(0) = -\frac{3}{2}$. Далі покладемо $y = 0$ і будемо мати, що $f(0) = xf(0) + 3f(x) + 3$, звідки $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Перевіркою переконуємось, що ця функція задовольняє умови.

10.5. Позначимо через I – інцентр ΔABC. Оскільки ΔAMC рівнобедрений з вершиною в точці A, тому медіана AP співпадає з бісектрисою та висотою, звідси $I \in AP$, аналогічно $I \in BR$. Крім того $\angle CPI = \angle CRI = 90°$. Аналогічно $\angle CDI = \angle CEI = 90°$, тому усі чотири зазначені точки лежать на колі з діаметром CI.

11.1. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

11.2. Методом від супротивного, припустимо, що $3^m + 3^n + 1 = k^2$ для деякого натурального k. Тоді k – непарне, і розглянемо останню рівність у такому вигляді:

$$3^m + 3^n = (k+1)(k-1).$$

У правій частині добуток двох послідовних парних чисел, а тому вона кратна 8. Для лівої частини по модулю 8 маємо: $3^l \equiv 1; 3 \pmod 8$, тоді ліва частина не кратна 8. Одержана суперечність завершує доведення.

11.3. Див. 10.4.

11.4. Див. 10.5.

11.5. При $b = c$ перемагає Олеся, інакше – Андрій. Розглянемо випадок $b = c$. При будь-якому ході Андрія, Олеся зможе повернути гру у аналогічну позицію, де розподіл камінців у порядку спадання по купках буде $a_1 \ge b_1 = c_1 \ge 0$, при цьому $b_1 < b$. Дійсно, своїм ходом Олеся однією к купок обов'язково обере купку, що містить $c = b$ камінців. І при перекладанні камінців буде забирати камінці (тобто зменшувати їх кількість) саме з цієї купки. Нехай новий розподіл камінців після ходу Андрія стане $a' \ge b' > c_1 \ge 0$. Тоді Олеся вибирає для ходу найбільші дві купки і робить в них розподіл $a_1 \ge b_1 = c_1 \ge 0$, що й треба було показати.

Як бачимо кількість камінців у найменшій купці монотонно спадає, якщо після чергового ходу Андрія одна з купок стане порожньою, то наступним своїм ходом Олеся зробить другу купку порожньою і переможе у грі.

Якщо на початку гри $b > c$, то перемагає Андрій. Він своїм ходом вибирає дві найбільші купки і переводить гру у позицію $a_1 > c = c > 0$. Далі стратегія гри вже описана.